DQFJ04 2025-61

(1)

Prólogo: A dissertação a seguir é baseada no ponto sorteado, Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas e ~~a~~ terá como base as ementas das disciplinas ofertadas pelo Departamento de Química e Física, a saber Física C, Física D, Eletromagnetismo I e laboratório de física moderna. As ementas estão disponível no site do departamento.

## Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

No final do século XIX, foram formuladas leis matemáticas que exprimiam, por sua vez, leis empíricas baseadas nos fenômenos elétricos e magnéticos que estavam sendo investigados na época.

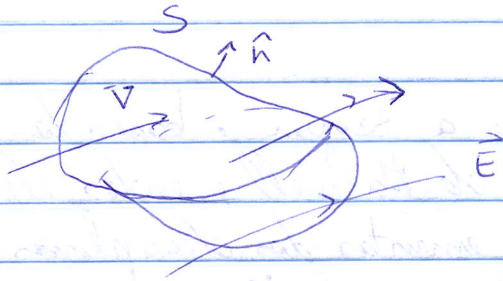
Essas Leis, antes de 1888, eram escritas da seguinte forma. A primeira delas é

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Essa é a Lei de Gauss para o campo elétrico, que em sua forma diferencial, diz que o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ possui uma divergência ~~dada~~ proporcional a densidade de cargas livres $\rho(\vec{r},t)$.

Em sua forma integral, onde usamos o teorema do divergente do cálculo vetorial $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS$,

exprime o fluxo do campo, através de uma superfície fechada $S$ que limita um volume $V$. Essa superfície possui uma orientação dada pelo vetor normal $\hat{n}$, conforme a figura




fluxo de $\vec{E}$

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS}$$

O fluxo do campo elétrico através de uma dada superfície S é proporcional à quantidade de cargas livres $Q(\vec{r},t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\, dV$ contidas no volume V.

A segunda lei é escrita como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = 0$$

que é a Lei de Gauss para o campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$.
O fato de que a divergência do campo $\vec{B}$ é nula, indica a ausência de monopolos magnéticos na natureza, uma vez que o campo não pode ter fontes ou sorvedouros pontuais, conforme o significado geométrico da divergência.

Nesse ponto é pertinente dizer que o conceito de "campo", fundamental hoje para a física, foi introduzido por Michael Faraday entre os anos 1860-1870 como uma forma de explicar ou visualizar as interações elétricas e magnéticas.

A terceira lei é baseada nos experimentos de Faraday, e pode ser escrita como

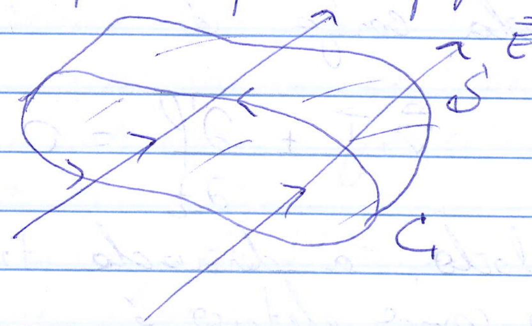
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS$$

Seu significado físico é de que a variação temporal de um campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$ induz um campo elétrico $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Na forma integral, usamos o Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\, dS$$ , que relaciona a integral

de linha em uma curva fechada $C$, com o fluxo do campo em uma superfície $S$ que tem como borda o caminho $C$, conforme a figura abaixo



Essa Lei é a base do fenômeno de indução eletromagnética, onde ao variarmos o fluxo do campo magnético através de um circuito dado por $C$, conseguimos produzir um campo $\vec{E}$ que por sua vez irá produzir uma corrente elétrica.

A quarta Lei, conforme escrita antes do trabalho de James Clerk Maxwell em 1888, é

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS$$

a chamada Lei de Ampère, que diz que uma densidade de corrente elétrica $\vec{J}(\vec{r},t)$ produz um campo magnético.

Essas Leis explicavam grande parte dos fenômenos elétricos e magnéticos observados na época, porém havia um problema: elas não são consistentes com a conservação da carga elétrica.

De fato, ao tomarmos o divergente da Lei de Ampère, obtemos

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{J} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$$

O que não é sempre verdade. A equação da conservação da carga é

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Por outro lado, a derivada temporal da Lei de Gauss para o campo elétrico é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Assim, para sermos consistentes com a conservação da carga, precisamos acrescentar o termo $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ como um tipo de corrente do lado direito da Lei de Ampère.

Esse termo foi introduzido por Maxwell e recebe o nome de corrente de deslocamento.

DAF J04 2025-61

(2)



Dessa forma, as equações de Maxwell no vácuo são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou ainda, em sua forma integral

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \; ; \quad \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS \; ; \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS$$

Junto com a relação constitutiva $\vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$ e da equação da Força de Lorentz,

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

exprime de maneira completa a geração dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ pelas cargas e correntes e com também como essas cargas são afetadas pelos campos.

Na presença de um meio material, precisamos levar em conta a resposta da matéria aos campos aplicados. Para isso, precisamos introduzir os campos

$\frac{E^2}{t^2}$ $\quad \frac{E^2}{x^2} \cdot \frac{1^2}{x^2}$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

onde $\varepsilon$ e $\mu$ não são mais a permissividade elétrica e permeabilidade magnéticas do vácuo.
No caso simples de meios lineares e isotrópicos, essas quantidades são números, porém em meios não lineares e anisotrópicos as quantidades se tornam tensores $\varepsilon_{ij}$ e $\mu_{ij}$.

Vamos considerar as equações de Maxwell em sua forma diferencial, no vácuo e na ausência de cargas e correntes $(\rho(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t) = 0)$, de forma que

$$\text{I} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{III} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{IV}$$

Tomemos o rotacional da equação III,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Usando agora a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$ e também a equação IV para expressar $\vec{\nabla} \times \vec{B}$

$$\vec{\nabla} (\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}} \cdot \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0}$$

Que é uma equação de onda, em 3-D, com velocidade de propagação $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

De forma análoga, utilizando as outras duas equações, obteríamos

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0}$$

Ou seja, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ no vácuo obedecem a uma equação de onda homogênea.

O primeiro ser humano a chegar nesse resultado parece ter sido o próprio Maxwell. Ao conferir os valores numéricos das constantes $\varepsilon_0$ e $\mu_0$, Maxwell se deu conta de que a velocidade de propagação dessas ondas é muito próxima da velocidade da luz, medida na época.

Assim, sua conclusão, uma das mais importantes da história da física, é que a luz é uma onda eletromagnética.
Essa onda nada mais é do que as vibrações dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que sustentam um ao outro quando se propagam.

Vejamos agora algumas propriedades dessa onda eletromagnética.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y)\hat{i} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z)\hat{j} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x)\hat{k}$$

Vamos considerar, por simplicidade, uma onda que se move em uma direção somente, que iremos tratar como sendo a direção $\hat{z}$. Assim, os campos terão uma dependência da forma

$$\vec{E} = \vec{E}(z,t) \qquad \vec{B} = \vec{B}(z,t)$$

$$\vec{E} = (E_x(z,t), E_y(z,t), E_z(z,t)) \quad \vec{B} = (B_x(z,t), B_y(z,t), B_z(z,t))$$

e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}\hat{y} = -\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t}\hat{x} - \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}\hat{y} - \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}\hat{x} + \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t}\hat{y} + \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t}\hat{z}\right)$$

O primeiro resultado que podemos tirar dessas equações é de que

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

De forma que os campos não possuem uma componente na direção de propagação $\hat{z}$.

DQF 10420 25-61



(3) Assim, ficamos com o sistema de equações

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

que são equivalentes por meio da transformação

$$\begin{cases} E_y \to E_x \\ B_y \to -B_x \end{cases}$$

de forma que resolvemos somente um sistema.

Tomemos,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial B_x}{\partial t} & \text{(A)} \\[2ex] \dfrac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & \text{(B)} \end{cases}$$

Derivando em relação a $\frac{\partial}{\partial z}$ a equação (A) e em relação a $\frac{\partial}{\partial t}$ a equação (B) temos

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t} B_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Ao trocarmos a ordem das derivadas parciais e igualarmos as duas, obtemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = 0$$

e de forma análoga para $B_x$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = 0$$

Ou seja, ~~nosso sistema~~ nossa solução corresponde a campos que são perpendiculares entre si e também perpendiculares à direção de propagação da onda. Dizemos que a luz é uma onda transversal.

É fácil mostrar que a solução genérica da equação de onda é dada por

$$E_y(z,t) = E_y(z \pm vt), \qquad (v=c)$$

ou seja, a dependência espacial e temporal da solução deve ser dessa forma.

De fato, se definirmos uma variável $\xi = z + ct$ por exemplo, as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{d}{d\xi} = c\frac{d}{d\xi}$$

De forma que nosso sistema de equações Ⓐ e Ⓑ ficam

$$\frac{dE_y}{dz} = c\frac{dB_x}{dz} \quad ; \quad \frac{dB_x}{dz} = \mu_0 \varepsilon_0 c \frac{dE_x}{dz}$$

De forma que essas equações implicam que

$$\boxed{B_x(z) = \frac{E_x(z)}{c}}$$

Que é a relação entre as amplitudes dos campos.
De forma geral

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}}{c}} ,$$

Para uma onda se propagando na direção $\hat{z}$.

Na solução genérica, a dependência $z - ct$ representa uma onda que se propaga na direção de $z$ crescente e $z + ct$ é na direção de $z$ decrescente.

Vamos agora discutir o caso mais simples, de uma onda plana monocromática de frequência angular $\omega$.
Nesse caso,

$$\vec{E} = A\cos(k(z-ct))\,\hat{y} = A\cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$$

onde $\omega = kc$ é a relação de dispersão.

$\lambda = c.\nu$

$c = \lambda.\nu$

$\omega = \nu 2\pi$



O argumento da função oscilatória é chamado de fase da onda, onde podemos escrevê-la como

$$\varphi = kz - \omega t + \varphi_0 ,$$

onde $\varphi_0$ é uma constante de fase. Vemos que para um dado tempo $t$, temos que os planos $z = cte$ definem as frentes de onda, no caso chamadas ondas planas.

A fase terá uma velocidade, $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$, chamada velocidade de fase.

O período ~~a~~ dessa onda é dado por

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (\omega = 2\pi\nu)$$

e o comprimento de onda $\lambda$ está associado com o número de onda por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi . \frac{\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

O campo magnético associado a essa onda é simplesmente

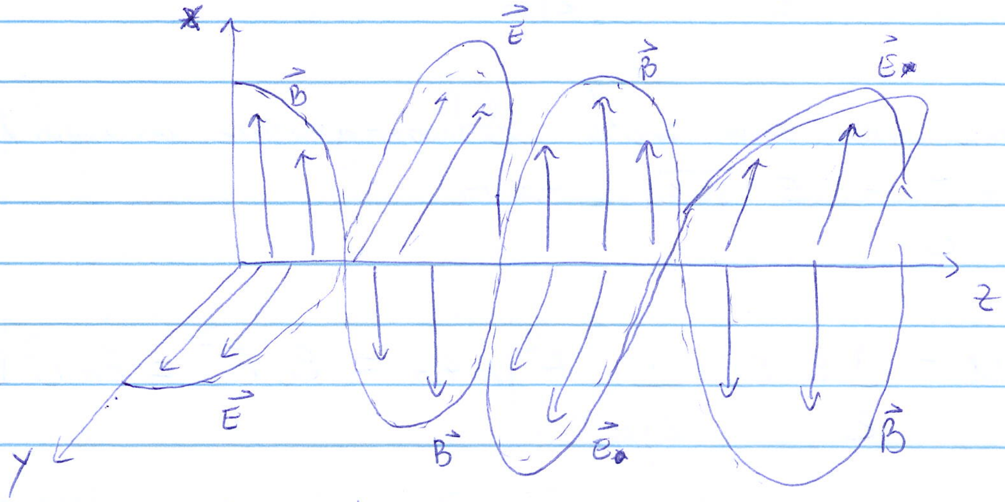
$$\vec{B} = \frac{A}{c} \cos(kz - \omega t)\, \hat{x}$$

DQF 10420025-61



(4) Vemos das soluções dos campos, que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilam em fase.

Uma representação gráfica dos campos é




Nesse caso particular, os campos oscilam em uma direção somente. Dizemos que a onda é linearmente polarizada.

Outras possibilidades de polarização, são ondas com polarização circular ou elíptica, a depender de como é a oscilação dos campos.

De forma geral, para uma onda se propagando na direção $\hat{u}$, temos

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left\{ A\,\hat{e}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)} \right\} \qquad \vec{k} = k\hat{u}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\hat{u} \times \vec{E}$$

$\hat{e}$ é o versor de polarização da onda.

Qual a energia que as ondas eletromagnéticas transportam? Para responder a essa questão, lembremos da densidade de energia eletromagnética

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Como, para uma onda eletromagnética as amplitudes $B = \frac{E}{c} = E\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, temos

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} E^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

O que mostra que a densidade de energia elétrica é igual à densidade de energia magnética. A todo momento, a energia da onda está igualmente distribuida nos campos.

Segundo o Teorema de Poyting,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \,,$$

onde $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ é o chamado vetor de Poyting. Esse vetor possui a direção de propagação da onda eletromagnética.

No caso da onda plana monocromática da discussão anterior,

$$\vec{S} = \frac{A^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(kz - \omega t + \varphi_0)\,\hat{z}$$

Como esse é um vetor que oscila a todo instante, é interessante tomarmos o seu valor médio

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{A^2}{\mu_0 c^2} \underbrace{\langle \cos^2(kz-\omega t+\varphi_0) \rangle}_{\approx \frac{1}{2}} = \frac{A^2}{2\mu_0 c^2}\,\hat{z} = \frac{A^2 \varepsilon_0}{2}\,\hat{z} = \frac{u}{2}\,\hat{z}$$

De forma que $\vec{S}$ representa o fluxo de energia, por unidade de tempo e de área, que a onda eletromagnética transporta.

Como considerações finais, dizemos que o espectro eletromagnético é bem vasto, sendo definido pelo comprimento de onda, onde temos

Ondas de Rádio, Microondas, Luz Visível, Ultravioleta -
~~λ ~ 30 m~~ ~~λ ~ 10 cm~~ ~~λ ~ 10⁻⁶ m~~ ~~Raios X, Raios Gamma~~

Por fim, vale dizer que as equações de Maxwell foram fundamentais para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita, uma vez que a eq. de onda não obedece às transformações de Galileu

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

A resolução desse problema leva às transformações de Lorentz e a definição de um espaço-tempo.

Qual a energia que as ondas eletromagnéticas transportam? Para responder a essa questão, lembremos da densidade de energia eletromagnética

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Como, para uma onda eletromagnética as amplitudes $B = \frac{E}{c} = E\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, temos

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} E^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

O que mostra que a densidade de energia elétrica é igual à densidade de energia magnética. A todo momento, a energia da onda está igualmente distribuída nos campos.

Segundo o Teorema de Poyting,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0,$$

onde $\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ é o chamado vetor de Poyting. Esse vetor possui a direção de propagação da onda eletromagnética.

No caso da onda plana monocromática da discussão anterior,

$$\vec{S} = \frac{A^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(kz - \omega t + \varphi_0)\,\hat{z}$$

Como esse é um vetor que oscila a todo instante, é interessante tomarmos o seu valor médio

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{A^2}{\mu_0 c^2} \underbrace{\langle \cos^2(kz-\omega t+\varphi_0) \rangle}_{=\frac{1}{2}} = \frac{A^2}{2\mu_0 c^2}\,\hat{z} = \frac{A^2 \varepsilon_0}{2}\,\hat{z}$$

$$= \frac{u}{2}\,\hat{z}$$

De forma que $\vec{S}$ representa o fluxo de energia, por unidade de tempo e de área, que a onda eletromagnética transporta.

Como considerações finais, dizemos que o espectro eletromagnético é bem vasto, sendo definido pelo comprimento de onda, onde temos

Ondas de Rádio, Microondas, Luz Visível, Ultravioleta -

$\lambda \sim 10\,m$ $\quad$ $\lambda \sim 10\,cm$ $\quad$ $\lambda \sim 10^{-6}\,m$ $\quad$ Raios X, Raios Gamma

Por fim, vale dizer que as equações de Maxwell foram fundamentais para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita, uma vez que a eq. de onda não obedece às transformações de Galileu

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

A resolução desse problema leva às transformações de Lorentz e a definição de um espaço-tempo.

Vale dizer também que a Mecânica Quântica também nasceu de uma aparente falha da descrição clássica da luz como onda eletromagnética.