①

DQF104 2025-35

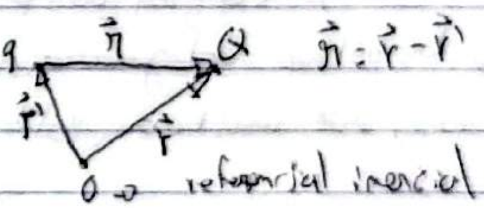
As equações de Maxwell contém toda informação do eletromagnetismo clássico. Representam um enorme sucesso do ponto de vista teórico, experimental e de aplicações práticas.

Eletrostática

Existem 2 tipos de carga na matéria, o que não decorre de um fato lógico, pois como na cromodinâmica quântica existe propriedades que se manifestam de três formas.

A lei de Coulomb é a lei que relaciona a força exercida entre as cargas

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, q \, Q \, \vec{\mathscr{r}}$$



$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$

Em que ε_0 é uma constante chamada permissividade do vácuo e (q, Q) são as cargas medidas em Coulombs. Cargas opostas se atraem e cargas iguais se repelem. A força está sempre na direção q até Q o sentido depende se as cargas são positivas com negativas como dito.

Pode-se definir um campo vetorial que atribuirá um vetor a cada ponto do espaço. De maneira que para saber a força sobre a partícula de prova basta multiplicar o vetor do campo pela carga

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$\hat{E}$ é chamado do campo elétrico. $\vec{E}(\vec{r})$ assim como $\vec{r}$ obedesce o princípio de superposição. Ou seja o efeito de cada carga individualmente somados é o efeito da carga total.

O campo elétrico tem a seguinte forma para uma distribuição de carga contínua.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{todo volume}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\eta^2} \, d\tau' \; \hat{\eta}$$

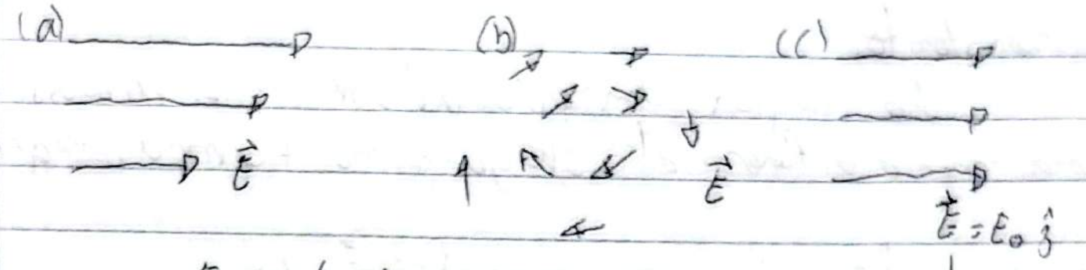
A densidade de cargas de cada ponto $\vec{r}'$, $\rho(\vec{r}')$ tem distância η^2 do ponto que se seja-se calcular o campo $d\tau$ é o infinitesimal do volume.

A integral deste campo escalar com um dl, ou seja, o trabalho realizado por ele, não depende do caminho. É claro, este resultado vale apenas na eletrostática. E portanto

$\vec{\nabla} \times \hat{E} = 0$ para eletrostática (densidade de carga não depende do tempo. Consequentemente o campo não depende do tempo.

$\vec{\nabla}$ é o operador laplaciano e pode ser escrito como $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ em coordenadas cartesianas. Em outro sistema de coordenada seu formato é outro (por exemplo em cilíndrica ou esférica.

O rotacional mede o quanto um campo vetorial gira. O análogo mecânico é colocar uma roda de pás em um campo de velocidades de um fluído incompressível. Se a roda de pás girar naquele ponto, então o rotacional $\vec{\nabla} \times$ será diferente de zero naquele ponto.



Exemplo do campo em que o rotacional é diferente do zero (a) e (b) do figura acima. E em que é nulo figura (c).

Aplicando o divergente no campo elétrico, chegamos na lei de Gauss na forma integral

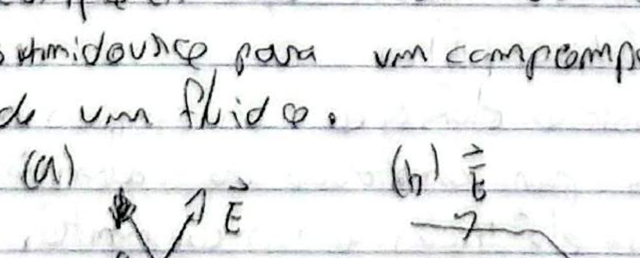
$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \underbrace{\vec{\nabla}_i \frac{\hat{\pi}}{\pi^2}}_{\delta^3(\vec{\pi})/4\pi} \rho(r')\, d\tau'$$ $\vec{\nabla}$ só atua nas coordenadas sem linhas

Em que, finalmente a lei de Gauss é

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad , \rho(\vec{r}) = \rho.$$

A delta de dirac $\delta^3(\vec{\pi})$ mostra matematicamente que apenas os pontos que há ~~diferença de~~ carga a integral contribui para o campo elétrico.

O divergente ($\vec{\nabla}$) mostra onde as linhas de campo elétrico "nascem" ou "somem" análogo a um sumidouro para um ~~campo~~campo vetorial da velocidade de um fluido.



No ponto que $\vec{\nabla}\ \vec{E}$ for diferente do zero há carga como mostrado na figura (a). Nas regiões que não a densidade de carga o número de linhas do campo permanece constante.

Ao integrar em todo volume a lei de Gauss na forma diferencial chega-se na forma integral.

$$\oint_{SG} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \cancel{\int \vec{E}\, d\tau}\; q_{enc}/\epsilon_0 = \int_{volume} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

A carga dentro de um volume V chamado q_{enc} é proporcional ao fluxo ~~magnético~~ elétrico através da superfície desse volume. Essa superfície é chamada de superfície gaussiana (S.G). A relação entre integral do volume do divergente do campo com o valor da função na superfície desse volume é feito através do teorema do divergente.

Magnetostática.

Agora para campos magnéticos que não mudam no tempo a lei de força será.

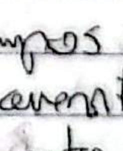
$$\vec{F}_B = Q(\vec{v}\times\vec{B})$$

A força magnética é proporcional a velocidade da carga Q ($\vec{v}$) e ao campo vetorial denominado campo magnético ($\vec{B}$).

No eletromagnetismo clássico os campos magnéticos são sempre gerados por densidade de correntes de carga, ou seja, cargas elétricas em movimento.

A lei que relaciona a densidade de corrente ($\vec{J}$) com o campo magnético é a lei de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{vol} \vec{J}(\vec{r}')\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, d\tau'$$



a posição da corrente

②

DGF1042025-35

A integral é em todo espaço, μ_0 é a permeabilidade do vácuo.

Ao calcular o divergente da lei de Biot-Savart temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Resultado que permanece válido fora da magnetostática e, segundo o significado físico de um campo discutido, expressa a não existência de monopólos magnéticos.

Estas cargas magnéticas, análogas as cargas elétricas implicariam na existência da quantização já observada. Elas (cargas magnéticas) nunca foram encontradas e, portanto, não existe maneira de separar o polo norte do polo sul de um imã.

Ao aplicar o rotacional na lei de Biot-Savart ~~e usar o teorema de stokes~~), chega-se em

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{enc} \qquad \vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$$

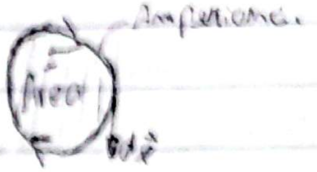
Esta é a lei Ampère na forma diferencial. Ela mostra que onde há densidade de corrente $\vec{J}$ haverá um campo magnético. O formato deste campo será circulando esta corrente. Este formato do campo se deve ao rotacional, o qual o significado físico já foi discutido.

Integrando em uma área qualquer a lei de Ampère na forma diferencial

$$\int \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = I_{enc}$$

Obtemos I_{enc}, que é a corrente que passa pela área da integral. Pode-se relacionar o rotacional do campo ~~com a~~ ~~(funções)~~ em uma área, com o valor do campo nas bordas da área. A borda desta área é chamada neste contexto da lei de Ampère de Amperiana.

$$\int_{\text{Área}} \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{a} = \oint_{\text{Amperiana}} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$



Logo, a lei de Ampère na forma integral é dada por

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Surpreendentemente, a integral do campo magnético pode ser usada com grande êxito para calcular o próprio campo, em certas circunstâncias.

Para isso é necessário que haja simetria na distribuição de corrente de maneira que o produto escalar seja 0 ou 1 e $\vec{B}$ sempre constante sobre a amperiana.

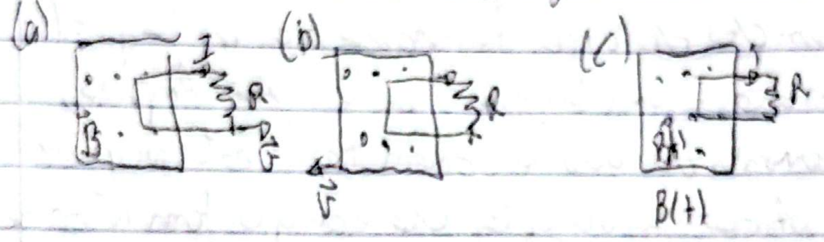
Simetrias
cilíndrica $\vec{J}(\hat{s})$
toroidal
planar $\vec{J}$

Escolha uma amperiana apropriada e é possível calcular $\vec{B}$

A situação é análoga com a lei de Gauss na forma integral. Simetria na distribuição de carga, esférica, cilíndrica ou planar geram um campo $\vec{E}$ com mesma simetria. Com a escolha de uma SG apropriada é possível calcular o campo $\vec{E}$.

Lei de Faraday

Considere os seguintes experimentos



Em (A) a espira se move aparece uma corrente i, proveniente da Força de Lorentz

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Mas em (b) e (c) o efeito é o mesmo, surgimento de I, mas não há movimento de carga.

Faraday propôz que o campo magnético variando no tempo gera um campo elétrico.

$$\Phi_B = \cancel{\oint \vec{B} \cdot d\vec{a}}) \int \vec{B} \, d\vec{a} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A variação de fluxo é que gera um campo elétrico que alimenta o circuito.

É possível chegar na forma diferencial da lei de Faraday que é a seguinte.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

A integração numa área e usando o teorema de Stokes é que nos possibilita tal resultado. Um campo magnético variando no tempo gera um campo elétrico girando ao redor do campo magnético.

Maxwell percebeu uma inconsistência lógica nas leis apresentadas. A lei de Ampère gera uma ambiguidade na corrente que passa por um capacitor dependendo da área tomada na integral.

Adicionando um termo a lei de Ampère, chamado de corrente de deslocamento este problema é resolvido. A conservação de carga também se torna consequência das equações de Maxwell.

$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ termo de Maxwell

$\vec{\nabla} \rho = -\vec{\nabla} \vec{J}$ equação de continuidade relacionando ρ e J garantindo conservação da carga

Equações de Maxwell na forma integral

Lei de Gauss (i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ (ii) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial B}{\partial t}$ lei de Faraday

(iii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (iv) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Lei de Ampère Maxwell

Maxwell resolveu uma questão tão importante que as equações resolvidas receberam seu nome.

Agora densidade de carga e densidade de corrente geram campos elétricos e magnéticos. Mas além dessas fontes primárias campos ($\vec{E},\vec{B}$) variando no tempo também geram campos ($\vec{B},\vec{E}$)

Equações de onda no espaço livre

É possível ter campos elétricos e magnéticos se realimentando no espaço livre (vácuo). Fazendo $\rho = 0$ e $\vec{J}=0$ é possível desacoplar os campos elétricos e magnéticos.

Aplicando $\vec{\nabla}\times$ dos campos os 2 lados e usando a identidade apropriada, temos

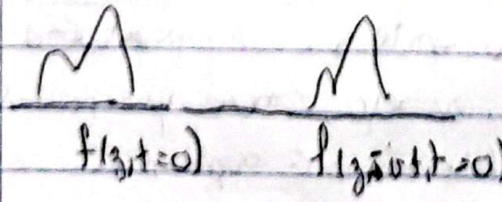
$$\vec{\nabla}\times(iii) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0 \text{ devido a (ii)}}) + \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ devido a (iii)}}$$

Chegando a equação de onda

$$\nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t}$$

∇^2 é o laplaciano $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ coordenadas cartesianas

Está equação é clássica dos cursos de ondulatória em que um pulso sem mudar de forma se propaga



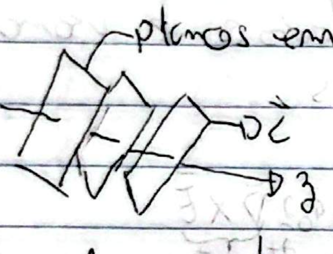
representação 1D de uma onda.

$f(z,t=0)$ $\quad$ $f(z-vt,t=0) = f(z,t)$

Com isso é claro que campos elétricos e ~~(to)~~ magnéticos ~~(em)~~ geram uma onda

Chamada de onda eletromagnética com velocidade $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 300$ mil km/s que é exatamente a velocidade da luz. Isso é muito surpreendente, a luz visível faz parte de um espectro de ondas com vários comprimentos de onda λ e frequência ν que se propaga no vácuo.

Tal manipulação matemática é equivalente para iv. $\vec{\nabla} \times$ (iv) gera equações de onda. A solução deste tipo de equação pode ser ondas planas.



A representação matemática de ondas planas 3D é

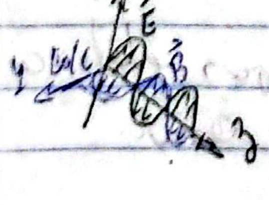
$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$
$$\tilde{\vec{B}} = \vec{B_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$\tilde{\vec{E}}$ e $\tilde{\vec{B}}$ são representações complexas, suas partes reais levam a $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$\vec{k}$ é o número de onda, sua direção é na direção o sentido de propagação da onda.

(i) e (ii), (iii) e (iv) limitam o formato possível de ondas possível. $\vec{B}$ e $\vec{E}$ são perpendiculares entre si e em relação à direção de propagação da luz. A intensidade máxima do campo magnético B_0 é dado por $B_0 = E_0/C$

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilam em fase entre si. A representação de uma onda polarizada, ou seja, onda que por definição $\vec{E}$ oscila em apenas uma direção. É dado por.



$\vec{E} \perp \vec{B}$ $\quad$ $\vec{B} \perp \vec{k}$

$\vec{E} \perp \vec{k}$ $\quad$ $B_0 = E_0/C$

Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ transportam momento e energia. O vetor de poynting representa a energia por unidade de área e tempo

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$ vetor de Poynting

. A quantidade de energia transportada por $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é igual. $\vec{S}$ aponta, dada sua definição, na direção de propagação da onda.

Essa intensidade de energia transferida média no tempo é $|\langle \vec{S} \rangle|$, ou seja a média do vetor de poynting. Quando a luz toca matéria ela exerce uma pressão. Embora seja difícil de perceber no dia a dia esse efeito pode prender esferas microscópicas num experimento de pinça óptica.

Luz em materiais isolantes

Quando a luz está em materiais dielétricos isolantes não há carga livre nem corrente livre. Mesmo assim o comportamento pode ser complexo matematicamente. Por isso, é útil considerar a equação de maxwell para matéria

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \rho_e \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu J_e + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

com $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$ e $\mu = \mu_0(1+\chi_m)$. Sendo a suscetibilidade elétrica ε e μ propriedades do ~~???~~ dependente do material. magnética.

A permeabilidade elétrica e magnética ~~são (χ_e e χ_m)~~

As suscetibilidades elétrica e magnética são constantes dependentes do material que demonstram a linearidade entre a dependência da polarização e magnetização decorrente de um campo elétrico e magnético aplicado no material.

Logo as equações apresentadas são as ~~eq~~ equações de Maxwell para materiais lineares, homogênicos, e isotrópicos.

Esses campos precisam obedecer condições de contorno entre dois meios dado por

$$\frac{\vec{E}_1^{\parallel}}{\epsilon_1} - \frac{E_2^{\parallel}}{\epsilon_2} = \sigma_e \qquad \vec{E}_1^{\perp} - \vec{E}_2^{\perp} = 0$$

$$B_1^{\parallel} - B_2^{\parallel} = 0 \qquad \frac{\vec{B}_1^{\perp}}{\mu_1} - \frac{B_2}{\mu_2} = K_e \times \hat{m}$$

Quando não há cargas livres $\sigma_e = 0$ e nem densidade de carga livre $\vec{J}_e = 0$. As equações de ~~maxl~~ Maxwell mantêm a sua forma trocando apenas $\mu_0 \varepsilon_0$ por $\mu \varepsilon$

$$\left.\begin{matrix} \mu_0 \to \mu \\ \\ \varepsilon_0 \to \varepsilon \end{matrix}\right\}$$ eq. Maxwell num meio linear, homogênico e isotrópico.

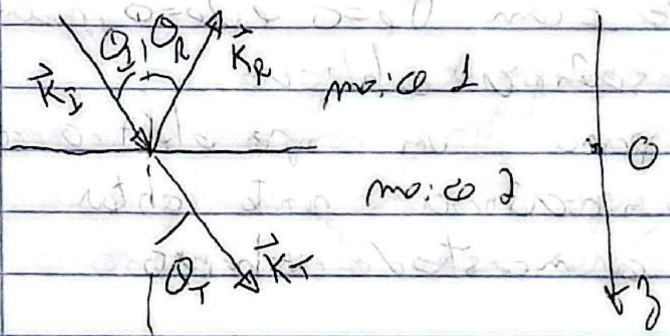
A interpretação é a mesma ~~tal~~ do que no vácuo, há uma onda pois manipulações matemáticas chegam em equações de onda.

Mas agora a velocidade da onda é $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ que é menor que a velocidade no vácuo

(4)

DGF 1042025-35

A situação fica interessante quando há transição de um meio para outro.



Quando a onda passa de um meio 1 para outro uma parte é transmitida e a outra é refletida. As equações de ~~onda~~ campo devem ser iguais em $z=0$. Isso gera os 3 leis básicas da óptica geométrica

1ª lei: A onda incidente, refletida e transferida forma um plano e este plano é chamado de plano de incidência.

2ª lei: O ângulo de incidência e o de reflexão são iguais. $\theta_I = \theta_R$.

3ª lei: O ângulo de incidência e o de transmissão ~~formam~~ se relacionam pela lei:

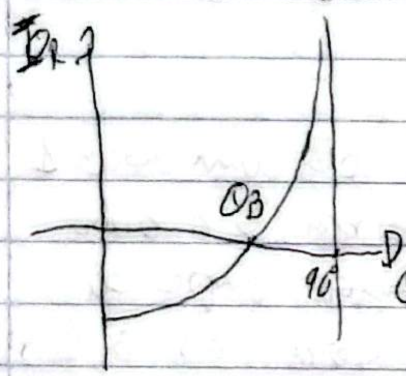
$n_1 \operatorname{sen} \theta_I = n_2 \operatorname{sen} \theta_R$ em que n é o índice de refração do material definido como $n_1 = \frac{v_1}{c}$.

Tal propriedade da luz de mudar seu caminho ao passar de um meio para o outro é chamada de refração.

~~Equação de Maxwell em meios condutores~~

Usando as condições de contorno apresentadas anteriormente e seguindo com $\sigma_f=0$ e $\vec{J}_f=0$, podemos considerar o efeito da incidência oblíqua.

A solução obtida para um campo elétrico com polarização paralela com incidência permite obter resultados ~~obl~~ como o mostrado abaixo



$\vec{E}$ oscila no plano de incidência

} Intensidade da luz refletida é negativa para ângulos abaixo a θ_B. Isso se deve a mudança de fase num valor de 180° com relação da onda incidente.

θ_B é o ângulo de Brewster em que não há onda transmitida. Para ângulos maiores que θ_B ($\theta_I > \theta_B$), não há troca de fase e a intensidade refletida tende a um máximo na incidência rasante.

~~Onda~~ Equações de Maxwell para condutores.

Consideramos as equações de Maxwell em um condutor. Neste caso a densidade de cargas livres é nula. Dentro do condutor não há cargas. Se elas forem inicialmente diferentes de zero, elas rapidamente desaparecem exponencialmente. Basta usar a equação de continuidade para verificar isso.

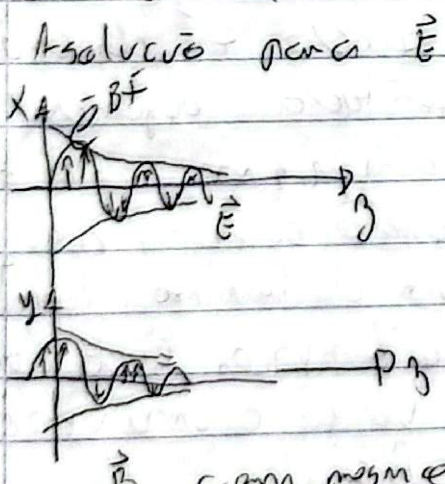
Usando a lei de Ohm que fala que a corrente é proporcional ao campo aplicado $\vec{J}=\sigma\vec{E}$. Em que σ é a condutividade do material. Temos os seguintes campos desacoplados.

$\partial \vec{E}$) $\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ($\vec{B}$ é análogo)

Esse tipo de equação de onda modificada pelo termo $\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ aceita uma solução de onda plana como apresentada. Mas o número de onda neste caso será complexo.

$\vec{k} = \alpha + \beta i$

A parte complexa de $\vec{k}$ gera uma defasagem de $\vec{B}$ em relação a $\vec{E}$. $\vec{E}$ e $\vec{B}$ continuam perpendiculares entre si e em relação a direção de propagação. A solução para $\vec{E}$ polarizado toma a forma.



As ondas são atenuadas por uma exponencial dependente da parte complexa do número de onda.

A defasagem da onda em $\vec{B}$ com mesmo comprimento de onda, mas defasada por $\phi = \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\vec{k}]}{\mathrm{Re}[\vec{k}]} = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$

Quando a onda passa de um material isolante para um material condutor há reflexão e transmissão.

A parte transmitida decai a zero como mostrado a parte refletida troca de condutividade (sofre troca de fase em relação a incidente de 180°).

Se o metal for um condutor perfeito ($\sigma \to \infty$)

A onda é toda refletida, é por isso que bons condutores geram bons espelhos. A prata é usada por isso e o vidro do espelho é apenas para dar o suporte.

Meios dispersivos

Em geral as ~~mei~~ propriedades dos meios dependem da frequência da onda.

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$$
$$\mu = \mu(\omega)$$
$$\sigma = \sigma(\omega)$$

Logo a velocidade da onda é dependente da frequência. A refração apresentada depende da cor da luz. É por isso que um prisma ou as gotas de água geram um padrão arco-íris.

Um pulso de onda com uma determinada forma tem sua forma modificada com o tempo. Cada componente com determinada frequência viaja a uma velocidade conhecida como velocidade de fase.

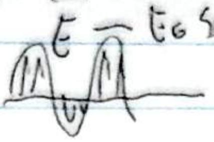
$v_f = \frac{\omega}{k}$ (pode ser maior que c

O grupo como todo viaja com velocidade de grupo

$\frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v_g < c$ (transporta informação $< c$).

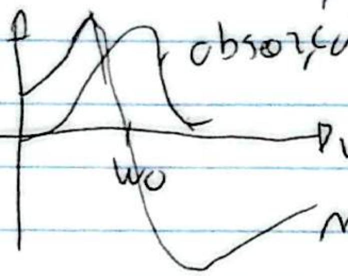
Um modelo muito simplificado da dispersão é um análogo do sistema massa-mola com termo de fonte e amortecimento.

(4) $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t + kz)\,\hat{x}$ DQF104 2025-35



ψ - átomo (núcleo)
ξ - mola representando ligação química
elétrica

O campo elétrico gera uma força senoidal que estimula o sistema. Quando há a mesma frequência existe ressonância.



wo ressonância (frequência de oscilação natural)

A absorção é máxima na ressonância, enquanto o índice de refração aumenta com a frequência em todo regime, menos para frequência $w = w_0$ de ressonância.

Este sistema simples capta a essência da dispersão sendo capaz de demonstrar inclusive a causa da absorção no ultravioleta de óxidos transparentes no visível.