DQF 1042025 - 33

EQUAÇÕES DE MAXWELL E ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

As leis fundamentais do eletromagnetismo, em sua forma integral, são as seguintes:

$$\oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV \text{ (lei de Gauss)},$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{(lei de Gauss — magnetismo)},$$

$$\oint_{C=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \quad \text{(lei de Ampère)},$$

$$\oint_{C=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot dS \quad \text{(lei de Faraday)}.$$

Estas, podem ser escritas em sua forma diferencial utilizando-se o teorema de Gauss,

$$\oint_{\partial V} \vec{u}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\, dV,$$

e o teorema de Stokes,

$$\oint_{\partial S} \vec{u}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot d\vec{S},$$

da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Essencialmente a partir da ideia de que essas leis ~~equações~~ deveriam ser simétricas em relação aos campos elétrico e magnético, com a recíproca geração de um com a ~~viação~~ variação no tempo do outro, Maxwell inferiu a existência de um termo adicional na lei de Ampère, concluindo que o campo eletromagnético deve satisfazer as equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4)$$

Além dessas quatro equações de Maxwell,

é útil na descrição do movimento de cargas a lei de força de Lorenz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

onde q e $\vec{v}$ são a carga e a velocidade de uma partícula.

Aplicando-se o operador divergente, $\vec{\nabla}\cdot$, na equação (3), e depois usando-se a identidade $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times u) = 0$ e a equação (1), chega-se na equação de continuidade da corrente,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

que estabelece a conservação da carga elétrica.

Considere agora as equações de Maxwell com ausência de fontes de campo ($\rho = 0$ e $\vec{j} = \vec{0}$):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \qquad (5)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad (6)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad (7)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad (8)$$

Agora, aplicando-se o operador rotacional, $\vec{\nabla}\times$, nas equações (7) e (8), obtém-se:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}), \quad (9)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}). \quad (10)$$

Usando-se então as equações (8) e (7) nas equações (9) e (10), respectivamente, obtém-se:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Aplicando-se ~~finalmente~~ a identidade vetorial,

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u} = \vec{\nabla}^2\vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$$

e considendo-se as equações (5) e (6), nas equações (11) e (12), obtém-se finalmente:

$$\vec{\nabla}^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad (13)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (14)$$

As equações (13) e (14) correspondem à equação de ondas homogênea para os campos elétrico e magnético, cuja velocidade de propagação (no vácuo) é c tal que

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2},$$

ou seja,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (15)$$

Esta constante equivale à velocidade de propagação da luz no vácuo.

Desta forma, Maxwell concluiu que o campo eletromagnético se propaga como uma onda e que a luz visível é um tipo de onda eletromagnética — todas essas ondas se propagam no vácuo com a mesma velocidade c, dada pela equação (15).