CÓDIGO: DQF104 2025-30 1

EQUAÇÕES DE MAXWELL E ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Fls. UFES Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

AS EQUAÇÕES DE MAXWELL EXPRESSAM O NÚCLEO BÁSICO DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA E DESCREVEM COMO CARGAS ELÉTRICAS E CORRENTES ELÉTRICAS PRODUZEM CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS, BEM COMO ESSES CAMPOS SE ACOPLAM E EVOLUEM NO ESPAÇO E NO TEMPO. ESSAS EQUAÇÕES REPRESENTAM DE FORMA UNIFICADA OS FENÔMENOS DA ELETRICIDADE E DO MAGNETISMO E, ADEMAIS, MOSTRAM A EXISTÊNCIA DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS QUE, NO VÁCUO, SE PROPAGAM COM A VELOCIDADE DA LUZ. EM SÍNTESE, AS EQUAÇÕES DE MAXWELL SÃO QUATRO, QUE PODEM SER REPRESENTADAS NA FORMA INTEGRAL OU DIFERENCIAL.

FORMA INTEGRAL DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

1. $$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0}$$ (LEI DE GAUSS DA ELETRICIDADE)

A PRIMEIRA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL É CONHECIDA COMO LEI DE GAUSS DA ELETRICIDADE. ESTA LEI AFIRMA QUE O FLUXO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE FECHADA, DENOMINADA SUPERFÍCIE GAUSSIANA (S), É PROPORCIONAL À QUANTIDADE DE CARGA PRESENTE NO INTERIOR DESSA SUPERFÍCIE (DENOTADA POR q_{INT}) DIVIDIDA PELA PERMISSIVIDADE ELÉTRICA (ε_0). A LEI DE GAUSS INTRODUZ UMA FORMA EFICIENTE DE SE OBTER O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR DISTRIBUIÇÕES DE CARGA COM SIMETRIAS BEM DEFINIDAS E REPRODUZ A LEI DE COULOMB COMO CASO MAIS SIMPLES.

2. LEI DE GAUSS DO MAGNETISMO: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

A LEI DE GAUSS DO MAGNETISMO EXPRESSA A INEXISTÊNCIA DE MONOPÓLOS MAGNÉTICOS, OU "O FLUXO MAGNÉTICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE FECHADA É NULO". ISTO SIGNIFICA QUE O NÚMERO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO QUE ENTRAM EM UMA SUPERFÍCIE FECHADA É EXATAMENTE O MESMO NÚMERO DE LINHAS QUE SAEM DESSA SUPERFÍCIE. A LEI DE GAUSS DO MAGNETISMO EXPRESSA A NATUREZA DAS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO EM TERMOS DE LINHAS QUE SÃO SEMPRE FECHADAS.

3. LEI DE FARADAY DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi_B \quad , \quad \Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

A LEI DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA CONECTA FENÔMENOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS; ELA NOS DIZ QUE UM CAMPO MAGNÉTICO VARIÁVEL NO TEMPO PRODUZ UM CAMPO ELÉTRICO DE CARATER NÃO CONSERVATIVO. O SINAL NEGATIVO QUE APARECE NA EQUAÇÃO É TAMBÉM CONHECIDO COMO LEI DE LENZ, E NOS DIZ QUE OS EFEITOS DECORRENTES DA VARIAÇÃO DO FLUXO MAGNÉTICO SE OPÕEM À PRÓPRIA VARIAÇÃO DO FLUXO.

4. LEI DE AMPÈRE-MAXWELL

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{ENC} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E$$

A LEI DE AMPÈRE-MAXWELL NOS DIZ QUAIS SÃO AS POSSÍVEIS FONTES DE CAMPOS MAGNÉTICOS E COMO ESSES CAMPOS SE COMPORTAM NO ESPAÇO E NO TEMPO. DEVE AQUI NOTAR QUE, PARA CAMPOS QUE NÃO VARIAM NO TEMPO, A EQUAÇÃO ACIMA SE REDUZ À LEI DE AMPÈRE:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 . i_{ENC},$$

OU SEJA, A INTEGRAL DE $\vec{B}$ AO LONGO DE UMA CURVA FECHADA (CHAMADA AMPERIANA) É PROPORCIONAL À DISTRIBUIÇÃO DE CORRENTE ENCERRADA POR ESSA CURVA, DENOTADA POR i_{ENC}, MULTIPLICADA PELA PERMEABILIDADE MAGNÉTICA DO VÁCUO (μ_0). EM TERMOS SIMPLES, A LEI DE AMPÈRE IDENTIFICA A CORRENTE ELÉTRICA COMO FONTE DE CAMPO MAGNÉTICO.

A CORREÇÃO DE MAXWELL PARA A LEI DE AMPÈRE NOS DIZ QUE, ASSIM COMO A VARIAÇÃO DO FLUXO MAGNÉTICO PRODUZ UM CAMPO ELÉTRICO, A VARIAÇÃO DO FLUXO ELÉTRICO PRODUZ UM CAMPO MAGNÉTICO; OU SEJA, IDENTIFICA UM CAMPO ELÉTRICO VARIÁVEL COMO FONTE DE CAMPO MAGNÉTICO INTRODUZINDO O CONCEITO DE CORRENTE DE DESLOCAMENTO TAL QUE:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_{ENC} + i_d), \text{ ONDE } i_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E$$

É A CORRENTE DE DESLOCAMENTO, OBSERVADA INICIALMENTE EM CAPACITORES DURANTE OS CICLOS DE CARGA E DESCARGA.

DEVE-SE NOTAR, ADEMAIS, QUE AS EQUAÇÕES DE MAXWELL PODEM SER ESCRITAS EM SUA FORMA DIFERENCIAL, USANDO CONHECIDOS TEOREMAS DO CÁLCULO VETORIAL (A SABER, TEOREMAS DE STOKES E DA DIVERGÊNCIA). NA FORMA DIFERENCIAL, AS EQUAÇÕES DE MAXWELL SÃO TAIS QUE:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, ONDE ρ É A DENSIDADE DE CARGA DE UMA DADA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA; ESSA EQUAÇÃO REPRESENTA A FORMA DIFERENCIAL DA LEI DE GAUSS.

2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ É A FORMA DIFERENCIAL DA LEI DE GAUSS DO MAGNETISMO.

3. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ É A FORMA DIFERENCIAL DA LEI DE FARADAY.

4. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ É A LEI DE AMPÈRE-MAXWELL EM SUA FORMA DIFERENCIAL; $\vec{J}$ É A DENSIDADE DE CORRENTE.

CÓDIGO: DQF1042025-30

5

UM DOS GRANDES TRIUNFOS DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL FOI MOSTRAR QUE, NO VÁCUO, O CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO SATISFAZEM EQUAÇÕES DE ONDA QUE SE PROPAGAM COM A VELOCIDADE DA LUZ. ESSAS EQUAÇÕES DE ONDA SÃO OBTIDAS NOTANDO QUE, NO VÁCUO, TEMOS:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,\quad \nabla\times B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

CONSIDERE A SEGUINTE IDENTIDADE:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\nabla(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\nabla^2\vec{E}$$

POR OUTRO LADO, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$.

PORTANTO, TEMOS QUE

$$-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

OU

$$\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

DA EQUAÇÃO DE ONDA:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$ ONDE v É A VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA.

VEMOS, PORTANTO, QUE $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

SUBSTITUINDO OS VALORES DEVIDOS DE μ_0 E ε_0, OBTEMOS QUE

$$v \approx 3 \cdot 10^8 \, m/s = c$$

OU SEJA, É UMA ONDA QUE SE PROPAGA COM A VELOCIDADE DA LUZ.

DE FORMA SIMILAR, FAZENDO

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

OU SEJA

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}.$$

PORTANTO, O CAMPO MAGNÉTICO TAMBÉM SATISFAZ UMA EQUAÇÃO DE ONDA CUJA VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO É A VELOCIDADE DA LUZ. PODE-SE DIZER, ENTÃO, QUE A PRÓPRIA LUZ É UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA COMPOSTA POR CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS OSCILANTES, PERPENDICULARES ENTRE SI, E PERPENDICULARES À DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DA ONDA. OS CAMPOS OSCILAM E SE RETROALIMENTAM CONFORME AS EQUAÇÕES DE MAXWELL.